MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 7
4.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wie üblich, zeigen wir zwei Inklusionen:

- “$\subset$“: Es sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Dann gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$ mit $f(x) = y$. Dann ist also $x \in A_1$ oder $x \in A_2$; im ersten Fall folgt $y \in f(A_1)$, im zweiten $y \in f(A_2)$, und insgesamt folgt $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

  Kurz auch so aufgeschrieben:

  Sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$
  $\implies \exists\, x \in A_1 \cup A_2 \quad \text{mit} \quad f(x) = y$ (Def. von $f(A_1 \cup A_2)$)
  Für dieses x gilt dann $x \in A_1 \ \vee \ x \in A_2$
  Falls $x \in A_1 \implies y = f(x) \in f(A_1)$ (Def. von $f(A_1)$)
  Falls $x \in A_2 \implies y = f(x) \in f(A_2)$ (Def. von $f(A_2)$)
  In beiden Fällen ist also $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ ✓

- “$\supset$“:
  Sei $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$
  $\implies y \in f(A_1) \ \vee \ y \in f(A_2)$
  Falls $y \in f(A_1) \implies \exists x \in A_1 \subset A_1 \cup A_2 \quad \text{mit} \quad y = f(x)$
  Falls $y \in f(A_2) \implies \exists x \in A_2 \subset A_1 \cup A_2 \quad \text{mit} \quad y = f(x)$
  In beiden Fällen gibt es also $x \in A_1 \cup A_2$ mit $y = f(x)$, also ist $y \in f(A_1 \cup A_2)$. ✓

b) “$\subset$“:
Sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
$\implies \exists\, x \in A_1 \cap A_2 \quad \text{mit} \quad f(x) = y$ (Def. von $f(A_1 \cap A_2)$)
Für dieses x gilt dann $x \in A_1 \ \wedge \ x \in A_2$
$\implies y = f(x) \in f(A_1) \ \wedge \ y = f(x) \in f(A_2)$ (Def. von $f(A_1)$, bzw. $f(A_2)$)
$\implies y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ✓

Die bewiesene Inklusion kann aber tatsächlich *echt* sein. Sei beispielsweise die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die alles auf 0 abbildet, also $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $A_1 = \{1\}$ und $A_2 = \{2\}$ beispielsweise gilt dann $f(A_1) = \{0\} = f(A_2)$, also $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0\}$, aber $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ und damit $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$.

Ein solches Gegenbeispiel kann beispielsweise dadurch konstruiert werden, indem man versucht, die umgekehrte Inklusion zu beweisen, und sich klarmacht, woran man scheitert.
In diesem Fall könnte das so aussehen: Wir versuchen, die Behauptung „$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$“ zu beweisen. Sei also $y \in Y$ mit der Eigenschaft $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ vorgegeben. Wegen $y \in f(A_1)$ gibt es dann ein $x_1 \in A_1$ mit $y = f(x_1)$, und wegen $y \in f(A_2)$ gibt es auch ein $x_2 \in A_2$ mit $y = f(x_2)$. Weder von x_1 noch von x_2 weiß man aber, ob sie vielleicht in A_1 *und* A_2 liegen – das wüsste man nur, wenn man beispielsweise wüsste, daß $x_1 = x_2$ ist, aber dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund; Dies bräuchten wir aber, um zu zeigen, da y das Bild eines Elements von $A_1 \cap A_2$ ist.

Hieran scheitert also der Beweis, und entsprechend ist unser obiges Gegenbeispiel so konstruiert, daß A_1 und A_2 jeweils ein Element enthalten, das nicht in der anderen Menge liegt, die aber beide auf das gleiche Bild (hier 0) abgebildet werden.

2. a) Die Werte $f(x)$ für $x \in M$ geben wir in einer Wertetabelle an:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	1	3	2	5	3	7	4

Damit ist

$$\begin{aligned} f(M) &= \{f(x) \mid x \in M\} \\ &= \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8)\} \\ &= \{1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}\,. \end{aligned}$$

b) Nach Definition ist $f^{-1}(M)$ die Menge aller $x \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f(x) \in M$, also $f(x) \leq 8$. Welche x sind das? Dafür unterscheiden wir zwei Fälle für ein beliebig vorgegebenes $x \in \mathbb{N}$:

i. Ist x ungerade, so ist $f(x) = x$, und die Bedingung $f(x) \leq 8$ lautet genau $x \leq 8$.
ii. Ist x gerade, so ist $f(x) = \frac{x}{2}$, und die Bedingung $f(x) \leq 8$ lautet genau $\frac{x}{2} \leq 8$, also $x \leq 16$.

Damit besteht $f^{-1}(M)$ genau aus den *ungeraden* Zahlen zwischen 1 und 8 sowie den *geraden* Zahlen zwischen 1 und 16, also

$$\begin{aligned} f^{-1}(M) &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16\}\,. \end{aligned}$$

3. a) "$\subset$":
Sei $a \in A$.
$\Longrightarrow\quad f(a) \in f(A)$ (Def. von $f(A)$)
$\Longrightarrow\quad a \in f^{-1}(f(A))$ (Def. von $f^{-1}(...)$) ✓

b) Die Konstruktion eines Beispiels gelingt auch hier durch den Versuch, die umgekehrte Inklusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$ zu beweisen. Diese Überlegung könnte wie folgt aussehen – wir drucken sie klein, weil sie „mathematisch" überflüssig ist (die Angabe des Gegenbeispiels am Ende genügt).

Zum „Beweis" von $f^{-1}(f(A)) \subset A$ müssen wir $x \in f^{-1}(f(A))$ annehmen, also $x \in X$ mit $f(x) \in f(A)$. Dies bedeutet, daß es ein $a \in A$ gibt mit $f(x) = f(a)$. An dieser Stelle kommen wir nicht weiter, weil aus $f(x) = f(a)$ (solange man nicht z.B. Injektivität von f voraussetzt) nicht viel über x und a folgt.
Wir sehen also: Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, müssen wir dafür sorgen, daß es ein $a \in A$ und ein $x \in X \setminus A$ gibt mit $f(a) = f(x)$.

Nehmen wir beispielsweise $X = Y = \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die konstante Abbildung mit $f(x) = 5$ für alle $x \in \mathbb{N}$, und $A = \{1\} \subset \mathbb{N}$. Dann ist $f(A) = \{5\}$ und $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{5\}) = \mathbb{N}$ (denn es wird ja *alles* auf 5 abgebildet), also $A \subsetneqq f^{-1}(f(A))$.

Auch die Abbildung aus 4.5 der Vorlesung kann als Beispiel herangezogen werden: Für das dort markierte $A \subset X$ gilt $|A| = 3$ (d.h. A ist dreielementig), jedoch ist $|f^{-1}(f(A))| = 4$, also ist auch hier

$$A \subsetneqq f^{-1}(f(A)).$$

4. a) Es ist

$$f \circ g \; : \; \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\big(\frac{1}{x} + 1\big)$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x} + 1 - 1} \; = \; \frac{1}{\frac{1}{x}} \; = \; x$$

und

$$g \circ f \; : \; \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\big(\frac{1}{x-1}\big)$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x-1}} + 1 \; = \; x - 1 + 1 \; = \; x.$$

Es ist $f \circ g \neq g \circ f$, da die Quellen (und auch die Ziele) nicht übereinstimmen; es ist z.B.

$$\text{Quelle von } f \circ g \; = \; \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} \setminus \{1\} = \text{Quelle von } g \circ f.$$

b) Es ist

$$f \circ g \; : \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|b - a|)$$
$$= \big(|b - a| + 1, \; |b - a| - 1\big)$$

und

$$g \circ f \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1, \; x - 1)$$
$$= |x - 1 - (x + 1)| \; = \; |-2| \; = \; 2.$$

Es ist auch hier natürlich $f \circ g \neq g \circ f$, da die Quellen (und auch die Ziele) nicht übereinstimmen; es ist z.B.

$$\text{Quelle von } f \circ g \; = \; \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R} = \text{Quelle von } g \circ f.$$

c) Es ist

$$f \circ g \; : \; \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x - 1 + 1 = x, & \text{falls } x \geq 2, \\ 1 + 1 = 2, & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$

und

$$g \circ f \; : \; \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 1 = x,$$

da $x + 1 \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Auch hier ist $f \circ g \neq g \circ f$; zwar stimmen Quellen und Ziele der beider Kompositionen überein, es ist nämlich

$$\text{Quelle von } f \circ g \; = \; \mathbb{N} = \text{Quelle von } g \circ f \quad \text{ und}$$

$$\text{Ziel von } f \circ g \; = \; \mathbb{N} = \text{Ziel von } g \circ f;$$

jedoch ist

$$(f \circ g)(1) = 2 \neq 1 = (g \circ f)(1).$$